

凸 g - 期望的若干性质*

纪荣林, 江 龙, 石学军

(中国矿业大学理学院, 江苏 徐州 221116)

摘 要: 在倒向随机微分方程生成元满足基本假设的前提下, 证明了一个关于凸 g - 期望和凹 g - 期望的 Sandwich 定理。进一步地, 得到了一类凸 g - 期望全体的极小元的存在性, 并给出了其极小元性质的等价刻画。

关键词: 倒向随机微分方程; 凸 g - 期望; Sandwich 定理; 极小元

中图分类号: O211.67 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2015) 05-0011-04

Some Properties of Convex g - Expectations

Ji Ronglin, JIANG Long, SHI Xuejun

(School of Sciences, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

Abstract: Under the basic assumptions on generators, a sandwich theorem for convex g - expectations and concave g - expectations is proven. Furthermore, for some subsets of all convex g - expectations, the existence of their minimal members are proven and the properties of those minimal members are characterized.

Key words: backward stochastic differential equation; convex g - expectation; sandwich theorem; minimal member

考虑如下形式的一维倒向随机微分方程 (简记为 BSDE):

$$y_t = \xi + \int_t^T g(s, y_s, z_s) ds - \int_t^T z_s dB_s, t \in [0, T] \quad (1)$$

由 Pardoux-Peng^[1]知只要函数 g 关于变量 y 和 z 是 Lipschitz 的, ξ 和 $g(\cdot, 0, 0)$ 是平方可积的, 则 BSDE (1) 有唯一一对平方可积的适应解。 g 被称之为 BSDE (1) 的生成元, ξ 被称之为 BSDE (1) 的终端条件。我们将 BSDE (1) 的唯一一对平方可积的适应解记为 $(Y_t(g, T, \xi), Z_t(g, T, \xi))_{t \in [0, T]}$ 。如果 g 还满足 $g(t, y, 0) = 0$, 我们用 $\varepsilon_g[\xi]$ 表示 $Y_0(g, T, \xi)$; 用 $\varepsilon_g[\xi | \mathcal{F}_t]$ 表示 $Y_t(g, T, \xi)$, 并称之为 ξ 关于 \mathcal{F}_t 的条件 g - 期望^[2]。

g - 期望的概念可以看成是著名的 Girsanov 变

换的非线性推广。自从 g - 期望的概念提出以来, 研究者已经得到了关于 g - 期望的很多性质及其应用。如 Chen-Epstein^[3]利用 g - 期望研究了递归效用; Rosazza Gianin^[4]首次研究了 g - 期望与风险度量之间的关系; Jiang^[5]则建立了凸 g - 期望 (g - 期望诱导的凸风险度量) 与生成元 g 之间的一一对应关系。在 Coquet-Hu-Mémin-Peng^[6]关于非线性期望的公理化假设框架下, Jia^[7]研究了次线性期望的极小元的性质并获得了相应的 Sandwich 定理。

众所周知, g - 期望是一类典型的信息流相容的非线性期望, 且是由 BSDE 诱导出来的而非公理化假设产生的。因此, 一个自然的问题是: 在 g - 期望的框架下, 关于凸 g - 期望的极小元的性质刻画及相应的 Sandwich 定理是否类似成立?

* 收稿日期: 2015-01-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11371362); 2014 年江苏省普通高校研究生科研创新计划资助项目 (KYZZ-0373)

作者简介: 纪荣林 (1984 年生), 男; 研究方向: 非线性数学期望; 通讯作者: 江龙; E-mail: jianglong365@hotmail.com

受 Jiang^[5] 及 Jia^[7] 工作启发, 本文研究了关于凸 g -期望和凹 g -期望的 Sandwich 定理及凸 g -期望极小元的性质刻画, 主要结果如下: 设 ε_{g_1} 为凸 g -期望, ε_{g_2} 为凹 g -期望, 且 $\varepsilon_{g_1} \geq \varepsilon_{g_2}$, 则存在 (Ω, \mathcal{F}_T) 上的一个概率测度 Q_0 , 使得线性期望 E_{Q_0} 满足 $\varepsilon_{g_1} \geq E_{Q_0} \geq \varepsilon_{g_2}$. 进一步地, 令 $S = \{\varepsilon_g : \varepsilon_g \text{ 是凸 } g\text{-期望且 } \varepsilon_{g_1} \geq \varepsilon_g \geq \varepsilon_{g_2}\}$, 则 S 至少存在一个极小元, 且 ε_g 为 S 的一个极小元的充分必要条件是 ε_g 为线性 g -期望且满足 $\varepsilon_{g_1} \geq \varepsilon_g \geq \varepsilon_{g_2}$.

1 预备知识

设 T 是一个给定的正实数, $(B_t)_{t \geq 0}$ 是概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的 d -维标准布朗运动, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 是由该布朗运动生成的完备的 σ 域流. 对每一个正整数 n , 记 $\|\cdot\|$ 为 \mathbf{R}^n 中 Euclid 范数; 记 $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ 为 \mathcal{F}_t -可测且平方可积的随机变量全体.

对于 BSDE (1), 其生成元 g 是一个定义在 $[0, T] \times \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$ 上的实值函数, 对任意给定的 $(y, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$, $(g(t, y, z))_{0 \leq t \leq T}$ 是一个 \mathcal{F}_t -循序可测的过程且满足如下基本假设条件 (A1) 和 (A2):

(A1) (Lipschitz 条件) 存在常数 $K \geq 0$ 使得 $dP \times dt - a. s.$, 对任意的 $(y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$, 有

$$\begin{aligned} |g(t, y_1, z_1) - g(t, y_2, z_2)| \leq \\ K(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|) \end{aligned}$$

$$(A2) E \int_0^T |g(t, 0, 0)|^2 dt < +\infty.$$

(A3) $dP \times dt - a. s.$, 对任意的 $y \in \mathbf{R}$ 有 $g(t, y, 0) \equiv 0$.

为方便读者起见, 我们回顾 Peng^[2] 关于 g -期望和条件 g -期望的定义并引入 Jia^[7] 中非线性期望的定义, 如下:

定义 1 设生成元 g 满足条件 (A1) 和 (A3), 对任意的随机变量 $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, 定义

$$\varepsilon_g[\xi] := Y_0(g, T, \xi),$$

$$\varepsilon_g[\xi | \mathcal{F}_t] := Y_t(g, T, \xi), t \in [0, T]$$

则称 $\varepsilon_g[\xi]$ 为 ξ 的 g -期望, $\varepsilon_g[\xi | \mathcal{F}_t]$ 为 ξ 关于 \mathcal{F}_t 的条件 g -期望.

定义 2 称非线性泛函 $\varepsilon[\cdot]: L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P) \rightarrow \mathbf{R}$ 为非线性期望, 若其满足如下假设条件:

- (i) 保常数性: $\varepsilon[c] = c, \forall c \in \mathbf{R}$.
- (ii) 单调性: $\varepsilon[X] \geq \varepsilon[Y]$, 若 $X \geq Y, P - a. s.$
- (iii) 严格单调性: $\varepsilon[X] > \varepsilon[Y]$, 若 $X \geq Y, P - a. s.$, 且 $P(X > Y) > 0$.

定义 3 称非线性期望 ε 为凸期望 (凹期望), 若其满足

凸性 (凹性): $\varepsilon[\alpha X + (1 - \alpha)Y] \leq (\geq) \alpha \varepsilon[X] + (1 - \alpha)\varepsilon[Y], \forall \alpha \in [0, 1]$.

定义 4 称非线性期望 ε 为次线性期望 (超线性期望), 若 ε 是凸期望 (凹期望) 且满足

正齐次性: $\varepsilon[\lambda X] = \lambda \varepsilon[X], \forall \lambda \geq 0$.

定义 5 称非线性期望 ε 为线性期望, 若 ε 既是次线性期望又是超线性期望.

定义 6 设 (S, \leq) 为一偏序集, 称 F_0 为 S 的一个极小元, 若其满足

(i) $F_0 \in S$;

(ii) 对任意的 $F \in S$, 如果 $F \leq F_0$, 则 $F = F_0$.

下面引入本文的一些重要引理, 其中引理 1 来自文 [7] 推论 3.2; 引理 2 和引理 3 则分别源自文 [5] 定理 3.2 及引理 2.1.

引理 1 设 ε_1 为次线性期望, ε_2 为超线性期望. 若 $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$, 则存在线性期望 ε 使得 $\varepsilon_1 \geq \varepsilon \geq \varepsilon_2$.

引理 2 设生成元 g 满足条件 (A1) 和 (A3), 则以下陈述等价:

(i) $\varepsilon_g[\cdot]$ 是凸期望;

(ii) g 独立于 y 且关于 z 是凸的.

引理 3 设生成元 g 满足条件 (A1) 和 (A3), 且 g 独立于 y , 则对任意的 $p \in [1, 2], z \in \mathbf{R}^d$, 有

$$\begin{aligned} g(t, z) = L^p - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon_g[z \cdot (B_{t+\varepsilon} - B_t) | \mathcal{F}_t], \\ a. e. t \in [0, T] \end{aligned}$$

2 主要结果

定理 1 设 ε_{g_1} 为凸 g -期望, ε_{g_2} 为凹 g -期望. 若 $\varepsilon_{g_1} \geq \varepsilon_{g_2}$, 则存在 (Ω, \mathcal{F}_T) 上的一个概率测度 Q_0 , 使得对线性期望 E_{Q_0} 有 $\varepsilon_{g_1} \geq E_{Q_0} \geq \varepsilon_{g_2}$, 其中

$$\begin{aligned} \frac{dQ_0}{dP} | \mathcal{F}_t = \exp\left(\int_0^t v_s^{Q_0} dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t |v_s^{Q_0}|^2 ds\right), \\ t \in [0, T] \end{aligned}$$

$(v_t^{Q_0})_{t \in [0, T]}$ 是 \mathbf{R}^d -值循序可测的过程且 $dP \times dt - a. s.$, $|v_t^{Q_0}| \leq K$, 这里 K 为 Lipschitz 常数.

证明 首先, 证明对任意的凸期望 ε , 定义

$$\begin{aligned} \varepsilon^*[X] := \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \varepsilon\left[\frac{X}{\lambda}\right], \forall X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P) \end{aligned} \quad (2)$$

则 ε^* 是次线性期望且 $\varepsilon^* \leq \varepsilon$. 事实上, 令 $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0, k := \lambda_1 / \lambda_2 \geq 1$, 对每一个 $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$,

由 ε 的凸性知

$$\lambda_1 \varepsilon \left[\frac{X}{\lambda_1} \right] = k \lambda_2 \varepsilon \left[\frac{X}{k \lambda_2} \right] \leq k \lambda_2 \frac{1}{k} \varepsilon \left[\frac{X}{\lambda_2} \right] = \lambda_2 \varepsilon \left[\frac{X}{\lambda_2} \right]$$

故对每一个 $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, $\lambda \varepsilon \left[\frac{X}{\lambda} \right]$ 是关于 λ 在 $(0, +\infty)$ 递减的。令 $\lambda = 1$, 可得

$$\varepsilon^* \leq \varepsilon$$

类似地, 对每一个 $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, $-\lambda \varepsilon \left[\frac{|X|}{\lambda} \right]$ 是关于 λ 在 $(0, +\infty)$ 递增的。令 $\lambda = 1$, 有

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -\lambda \varepsilon \left[\frac{|X|}{\lambda} \right] \geq -\varepsilon[|X|] > -\infty$$

对任意的 $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, 由 ε 的保常数性、凸性及单调性, 可得

$$\begin{aligned} \varepsilon^*[X] &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \varepsilon \left[\frac{X}{\lambda} \right] \geq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \varepsilon \left[-\frac{|X|}{\lambda} \right] \geq \\ &\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -\lambda \varepsilon \left[\frac{|X|}{\lambda} \right] > -\infty \end{aligned}$$

从而对任意的 $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, $\varepsilon^*[X]$ 是实值的。

由 ε^* 的定义, 立即可得

$$\varepsilon^*[c] = c, \forall c \in \mathbf{R} \quad (3)$$

$$\varepsilon^*[X] \geq \varepsilon^*[Y], \text{若 } X \geq Y, P - a. s. \quad (4)$$

对任意的 $\alpha \in [0, 1]$, $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, 由 ε 的凸性及 ε^* 的实值性, 可知

$$\begin{aligned} \varepsilon^*[\alpha X + (1 - \alpha)Y] &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \varepsilon \left[\alpha \frac{X}{\lambda} + (1 - \alpha) \frac{Y}{\lambda} \right] \leq \\ &\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \left(\alpha \varepsilon \left[\frac{X}{\lambda} \right] + (1 - \alpha) \varepsilon \left[\frac{Y}{\lambda} \right] \right) = \\ &\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \alpha \lambda \varepsilon \left[\frac{X}{\lambda} \right] + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (1 - \alpha) \lambda \varepsilon \left[\frac{Y}{\lambda} \right] = \\ &\alpha \varepsilon^*[X] + (1 - \alpha) \varepsilon^*[Y] \end{aligned} \quad (5)$$

接下来, 有

$$\varepsilon^*[\beta X] = \beta \varepsilon^*[X], \forall \beta \geq 0, X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P) \quad (6)$$

事实上, $\beta = 0$ 时, 由 ε^* 的实值性及 (3) 式, 可得 $\varepsilon^*[\beta X] = 0 = \beta \varepsilon^*[X]$ 。令 $\beta > 0$, 有

$$\begin{aligned} \varepsilon^*[\beta X] &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \varepsilon \left[\beta \frac{X}{\lambda} \right] = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \beta \lambda \varepsilon \left[\frac{X}{\lambda} \right] = \\ &\beta \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \varepsilon \left[\frac{X}{\lambda} \right] = \beta \varepsilon^*[X] \end{aligned}$$

对任意的 $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, 由 (5) 式和 (6) 式, 知

$$\varepsilon^*[X + Y] \leq \varepsilon^*[X] + \varepsilon^*[Y] \quad (7)$$

组合 (3)、(4)、(6) 及 (7) 式, 欲证 ε^* 是次线性期望, 只需验证 ε^* 满足严格单调性条件。事实上, 令 $X \geq Y, P - a. s.$ 且 $P(X > Y) > 0$, 由 ε 的

严格单调性, $\varepsilon^* \leq \varepsilon$ 及 (7) 式, 可得

$$\begin{aligned} \varepsilon^*[Y] - \varepsilon^*[X] &\leq \varepsilon^*[Y - X] \leq \\ \varepsilon[Y - X] &< \varepsilon[0] = 0 \end{aligned}$$

故 ε^* 是次线性期望。

其次, 证明对任意的凸期望 ε_1 及凹期望 ε_2 , 若 $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$, 则存在线性期望 ε 使得 $\varepsilon_1 \geq \varepsilon \geq \varepsilon_2$ 。事实上, 定义

$$\varepsilon_1^*[X] := \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \varepsilon_1 \left[\frac{X}{\lambda} \right], \forall X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P),$$

$$\varepsilon_2^*[X] := \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \varepsilon_2 \left[\frac{X}{\lambda} \right], \forall X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$$

则 ε_1^* 是次线性期望且 $\varepsilon_1^* \geq \varepsilon_2^*$ 。类似于 ε_1^* 的证明步骤, 可得 ε_2^* 是超线性期望, 且

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_1^* \geq \varepsilon_2^* \geq \varepsilon_2$$

应用引理 1, 即知存在线性期望 ε 使得 $\varepsilon_1 \geq \varepsilon \geq \varepsilon_2$ 。

最后, 证明存在满足题设条件的概率测度 Q_0 , 使得 $\varepsilon_{g_1} \geq E_{Q_0} \geq \varepsilon_{g_2}$ 。由 Peng^[2] 知 g -期望是一类典型的非线性期望, 结合上一步的结论, 我们知道存在一个线性期望 ε_0 , 使得

$$\varepsilon_{g_1} \geq \varepsilon_0 \geq \varepsilon_{g_2}$$

由 g -期望的连续性及 Daniell-Stone 定理知, 存在 (Ω, \mathcal{F}_T) 上的唯一的概率测度, 记为 Q_0 , 且有

$$\varepsilon_0[X] = E_{Q_0}[X], \forall X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$$

应用引理 2 知, g_1 是独立于 y 的, 结合 Lipschitz 条件, $g_1(t, 0) \equiv 0$ 及比较定理, 得

$$E_{Q_0} \leq \varepsilon_{g_1} \leq \varepsilon_{g_k},$$

其中, $g_k: = K|z|, z \in \mathbf{R}^d, K$ 为 Lipschitz 常数。对任意的 $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, 由 E_{Q_0} 的线性性可得

$$E_{Q_0}[X + Y] - E_{Q_0}[Y] = E_{Q_0}[X] \leq \varepsilon_{g_k}[X]$$

由文 [6] 定理 7.1 知, 存在定义在 $\Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^d$ 上的唯一的生成元, 记为 g_{Q_0} , 且生成元 g_{Q_0} 满足以下三个假设条件:

(B1) (Lipschitz 条件) $dP \times dt - a. s.$, 对任意的 $z_1, z_2 \in \mathbf{R}^d$, 有 $|g_{Q_0}(t, z_1) - g_{Q_0}(t, z_2)| \leq K|z_1 - z_2|$ 。

(B2) $dP \times dt - a. s.$, $g_{Q_0}(t, 0) \equiv 0$ 。

(B3) $\varepsilon_{g_{Q_0}}[X] = E_{Q_0}[X], \forall X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ 。

由 (B3) 及条件期望的唯一性, 可得

$$\varepsilon_{g_{Q_0}}[X | \mathcal{F}_t] = E_{Q_0}[X | \mathcal{F}_t], t \in [0, T]$$

由引理 3 可知, g_{Q_0} 关于 z 是线性的, 即存在一个 \mathbf{R}^d -值循序可测的过程, 记为 $(v_t^{Q_0})_{t \in [0, T]}$, 使得

$$g_{Q_0}(t, z) = v_t^{Q_0} \cdot z, z \in \mathbf{R}^d, t \in [0, T]$$

由 (B1) 知, $|v_t^{Q_0}| \leq K, t \in [0, T]$ 。由 Girsanov 定理知, 存在概率测度 Q_v 使得

$$\frac{dQ_v}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^t v_s^{Q_0} dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t |v_s^{Q_0}|^2 ds\right),$$

$$t \in [0, T]$$

且 $B_t^v := B_t - \int_0^t v_s^{Q_0} ds, t \in [0, T]$, 是 Q_v -布朗运动。由 Girsanov 变换得

$$E_{Q_0}[X] = \varepsilon_{g_{Q_0}}[X] = E_{Q_v}[X],$$

$$\forall X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$$

特别地, 对任意的 $A \in \mathcal{F}_T$, 有

$$Q_0(A) = E_{Q_0}[1_A] = E_{Q_v}[1_A] = Q_v(A)$$

从而, $Q_0 = Q_v$ 。证毕。

定理 2 设 ε_{g_1} 为凸 g -期望, ε_{g_2} 为凹 g -期望且 $\varepsilon_{g_1} \geq \varepsilon_{g_2}$ 。令

$$S = \{\varepsilon_g : \varepsilon_g \text{ 是凸 } g\text{-期望且 } \varepsilon_{g_1} \geq \varepsilon_g \geq \varepsilon_{g_2}\}$$

则 S 至少存在一个极小元, 且以下陈述等价:

(i) ε_{g_0} 是 S 的一个极小元。

(ii) ε_{g_0} 是线性 g -期望且 $\varepsilon_{g_1} \geq \varepsilon_{g_0} \geq \varepsilon_{g_2}$ 。

证明 由定理 1 知, 存在一个线性 g -期望 ε_{g_3} 使得 $\varepsilon_{g_1} \geq \varepsilon_{g_3} \geq \varepsilon_{g_2}$ 。显然, $\varepsilon_{g_3} \in S$ 。对于 S 中任意的线性 g -期望 ε_g , 则 ε_g 必为 S 的极小元。事实上, 若存在 S 中的凸 g -期望 ε_{g_4} , 使得 $\varepsilon_{g_4} \leq \varepsilon_g$, 则对任意的 $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, 由 ε_{g_4} 的凸性和保常数性及 ε_g 的线性性, 知

$$\varepsilon_{g_4}[X] \leq \varepsilon_g[X] = -\varepsilon_g[-X] \leq -\varepsilon_{g_4}[-X],$$

$$0 = 2\varepsilon_{g_4}[X - X] \leq \varepsilon_{g_4}[X] + \varepsilon_{g_4}[-X]$$

故 $\varepsilon_{g_4}[X] = \varepsilon_g[X], \forall X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, 从而知 S 至少存在一个极小元且 (ii) \Rightarrow (i) 成立。

下证 (i) \Rightarrow (ii) 成立。设 ε_{g_0} 为 S 的一个极小元, 显然 ε_{g_0} 是凸 g -期望且 $\varepsilon_{g_1} \geq \varepsilon_{g_0} \geq \varepsilon_{g_2}$ 。应用定理 1 可知, 存在一个线性 g -期望 ε_g , 使得 $\varepsilon_{g_1} \geq \varepsilon_{g_0} \geq \varepsilon_g \geq \varepsilon_{g_2}$, 故 $\varepsilon_g \in S$ 。又 ε_{g_0} 为 S 的极小元且 $\varepsilon_{g_0} \geq \varepsilon_g$, 则由极小元的定义得 $\varepsilon_{g_0} = \varepsilon_g$ 。证毕。

对任意的凸 g -期望 ε_g 而言, 由引理 2 知 g 是独立于 y 的, 结合 Lipschitz 条件, $g(t, 0) \equiv 0$ 及比较定理知, $\varepsilon_{g-K} \leq \varepsilon_g \leq \varepsilon_{gK}$, 其中 $g_{-K} := -K|z|, z \in \mathbf{R}^d, K$ 为 Lipschitz 常数。由 Chen^[8] 知, ε_{gK} 为次线性 g -期望, ε_{g-K} 为超线性 g -期望。由此, 立即可得关于定理 2 的下述推论。

推论 1 设 ε_{g_1} 为凸 g -期望, 令

$$S = \{\varepsilon_g : \varepsilon_g \text{ 是凸 } g\text{-期望且 } \varepsilon_{g_1} \geq \varepsilon_g\}$$

则 S 至少存在一个极小元, 且 ε_{g_0} 是 S 的一个极小元当且仅当 ε_{g_0} 是线性 g -期望且 $\varepsilon_{g_0} \leq \varepsilon_{g_1}$ 。

推论 2 设 ε_{g_2} 为凹 g -期望, 令

$$S = \{\varepsilon_g : \varepsilon_g \text{ 是凸 } g\text{-期望且 } \varepsilon_g \geq \varepsilon_{g_2}\}$$

则 S 至少存在一个极小元, 且 ε_{g_0} 是 S 的一个极小元当且仅当 ε_{g_0} 是线性 g -期望且 $\varepsilon_{g_0} \geq \varepsilon_{g_2}$ 。

推论 3 设 S 为所有凸 g -期望的全体, 则 S 至少存在一个极小元, 且 ε_{g_0} 是 S 的一个极小元当且仅当 ε_{g_0} 是线性 g -期望。

参考文献:

- [1] PARDOUX E, PENG S G. Adapted solution of a backward stochastic differential equation [J]. Systems Control Letters, 1990, 14: 55-61.
- [2] PENG S G. BSDE and related g-expectation [J] // Backward stochastic differential equations. KAROUI N E, MAZLIAK L, eds. Pitman Res Notes Math Ser, 1997, 364: 141-159.
- [3] CHEN Z J, EPSTEIN L. Ambiguity, risk and asset returns in continuous time [J]. Econometrica, 2002, 70: 1403-1444.
- [4] ROSAZZA GIANIN E. Risk measures via g-expectations [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2006, 39: 19-34.
- [5] JIANG L. Convexity, translation invariance and subadditivity for g-expectations and related risk measures [J]. Annals of Applied Probability, 2008, 18: 245-258.
- [6] COQUET F, HU Y, MÉMIN J, et al. Filtration consistent nonlinear expectations and related g-expectation [J]. Probability Theory and Related Fields, 2002, 123 (1): 1-27.
- [7] JIA G Y. The minimal sublinear expectations and their related properties [J]. Science in China Series A: Mathematics, 2009, 39: 79-87.
- [8] CHEN Z J, KULPERGER R. Minimax pricing and choquet pricing [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2006, 38(3): 518-528.
- [9] CHEN Z J, CHEN T, DAVISON M. Choquet expectation and Peng's g-expectation [J]. The Annals of Probability, 2005, 33(3): 1179-1199.
- [10] HE K, HU M S, CHEN Z J. The relationship between risk measures and choquet expectations in the framework of g-expectations [J]. Statistics and Probability Letters, 2009, 79: 508-512.